「なぜ 1 + 1 = 2 となるのか？」について

はじめに

「なぜ 1+1=2 となるのか？」というのはなかなか手ごわい質問です。
というのは、この問いに答えるためには、まず
「1 とは何か」
「2 とは何か」
さらに言えば「0, 1, 2, 3, 4, 5,・・・・・と続く数 (自然数という注) とは何か？」
そして「+(加法) とはなにか？」といったことすべてに答えなければならないからです。

1　定義とは

「～とは何か？」ということを説明したものを数学では「定義」といっています。
例えば図形の「円」の定義は
「ある点からの距離が等しい点の集合」です。
これはコンパスで円を描くことを言葉で説明したものです。

この定義という言葉を使えば、
1 + 1 = 2 の考察をするためには、前もって「自然数の定義」、「+ (加法) の定義」をしておく必要があるのです。

ところが、ここでちょっと注意が必要です。
「～とは何か？」ということを突き詰めていくとキリがなくなってしまうということです。
どういうことかというと、先程の円の定義の中には「点」とか「距離」という言葉が出てきます。
となれば当然「点とはなにか？」「距離とは何か？」という、「点の定義」や、「距離の定義」が必要になってきます。
それにたいし「点とは長さも広さも持たず、位置だけが定まっているもの」と言ったとします。
しかし、さらに「長さとは何？」「位置とは何？」と聞かれたら、それに答えなければならなくなります。
こうしたことを続けていくとキリがなくなってしまうか、
「左とは右の反対であり、右とは左の反対である」という、「循環論法」に陥ってしまうのです。

これは、言葉を使って別の言葉の意味を説明することに限界があるからです。
そのため数学でも最後は直感に頼り、言葉による説明を放棄せざるを得ません。
このようにもうこれ以上説明せず、説明抜きに使う言葉を「無定義用語」といいます。
実は先程出てきた「点」というのは無定義用語なのです。
その他にも「直線」「長さ」「等しい」などは定義しないで使っています。

注　自然数に 0 を含めるかどうかは議論の分かれるところです。普通、日本の学校では 0 を含めていませんが、数学書などでは 0 を含めるものもあります。どちらが正解というわけではなく流儀の違いです。歴史的に考えたら 1, 2, 3,・・・という数にくらべて 0 が発見されたのはずっと後のことなので、0 は含めないほうが自然かもしれません。しかし、0 を含めたほうが加法の定義がしやすいので、ここでは 0 を含めておきます。

ただし、無定義用語はなるべく少なくすべきです。
どうしても説明できないもの、無理に説明したらかえって複雑になるものに限るべきで、
それ以外はきちんとした定義をしなければなりません。
自然数 (0, 1, 2, 3,・・・) や加法を定義するときも、すべてを定義し尽くすことは不可能です。
最後は「無定義用語」を使わざるを得なくなります。

2　公理について

これまで、「〜とは何か？」という問いには限界があることを説明してきましたが、
同様に「〜はなぜか？」という問いにも限界があるのです。
「リンゴが木から落ちるのはなぜか？」という問いに対し、
「それは重力があるからだ」と説明できます。
しかし「重力はなぜあるのか？」と聞かれたら困ります。
無理やり「重力を引き起こす物体 (地球とリンゴ) があるからだ」と答えたとしても、
「なぜ物体はあるのか」とさらに聞かれたら、さすがにお手上げではないでしょうか？
科学は重力の性質については詳しく分析し、記述できますが、
「なぜそれはあるのか？」という問いに対しては無力なのです。
どんなに科学が進歩したとしても「なぜ世界はあるのか？」という究極の問いには答えられません。
それは宗教の領域なのです。

数学でも「もうこれ以上説明できないもの」があります。
例えば「2 つの点を通る直線は 1 本だけ存在するのはなぜか？」と言われても困ります。
無理に説明してもかえって事態を複雑にしてしまうだけなので、
数学ではこれを証明なしで「正しい」と認めています。
このように証明抜きに正しいと認めている事柄を「公理」と呼んでいます。
数学の基礎にはもはや説明できない「公理」が存在しているのです。

数学は「無定義用語」から出発して少しずつ複雑な概念を定義していき、
「公理」を前提として少しずつ複雑な問題を証明していくものなのです。

3　自然数の公理

ここで、ようやく「1+1=2 はなぜか？」という問いを考察する出発点にたどり着きました。
まず始めにすべきことは、数の最も基礎となる「自然数」とは何かを考えることなのです。

普通、「自然数とは何か」といわれたら

「0,1,2,3,4,・・・・・を自然数という。」

という説明がされます。
子どもに初めて教えるときにはこれで充分だし、
厳密な定義をしようとすればかえって混乱を招きます。

ただ、この文章の目的である「1+1=2 となるのはなぜか？」ということを明らかにするためには、これではだめです。
なぜなら「1 とは何か？」「2 とは何か？」を説明するのに 1,2 を使うわけにはいかないからです。

また、自然数は必ずしも

0, 1 , 2 , 3 , 4 ,・・・・・である必要はなく、

零、壹、貳、參、肆、・・・・・でも

０、I、II、III、IV、・・・・・でもかまいません。

数を表す記号 (数字) は何であっても良いのです。

もっと言えば、数字も必ずしも必要ではありません。
人類が「数」という概念を獲得した初期のの頃は当然数字などなく、
「指を折ったり」「石を並べる」ことで数を数えていたのではないでしょうか？
朝、放牧した羊と同じ数の石を並べておくことで、夕べに全部が戻ってきたか調べたり、
一日ごとに木に傷を付けていくことで時間の経過を測る、
こうした行為が「数える」ということの始まりなのではと想像できます。
そう考えると数字は必ずしも自然数の「本質」ではありません。

それでは自然数の「本質」とはないか？
それは自然数が満たすべき最低条件を考えることで明らかになります。

まず初めに考えられるのは「ずっと続いていくこと」ではないでしょうか？
例えば「石を並べていく」ということには常に「次の状態」があり、
それが「数える」ことを可能にしているのです。

0, 1, 2, 3, 4, 5　(5 で終わってしまう) 注

のように、途中から先に進まなくなっては困ります。
常に「その次」があることによって、ずっと続いていく系列が生まれてくるのです。

次に考えられるのはずっと続いていくといっても「繰り返しになっては困る」ということです。

0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3,・・・

というようにループになっては困ります。
同じ繰り返しでも

0, 1, 2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 3, 4, 5,・・・・

のように途中でループになってもだめです。

自然数であるためには
「常に『次』があって、しかも『前と同じ』にはならない」ということが必要なのです。
この条件のもとで、一番初めの状態が決まれば
「無限に続いていく一本の系列」が生み出されるので、これを自然数とすればよいのです。

こうした考えから 1889 年にペアノという数学者が自然数が最低限満たすべき 5 つの「公理」を提唱しました。
現在これは「ペアノの公理」と呼ばれ、自然数の定義に使われています。

注 「数字は自然数の本質ではない」とは言っても、我々はやはり数字を使い慣れているので説明には「数字」を使わせてもらいます。

それではいよいよ「ペアノの公理」に基づいて自然数を定義します。

自然数の定義：「集合Ｎが次のⅠ～Ⅴを満たすとき、Ｎを自然数という」

Ⅰ　<u>０という要素を含む</u>

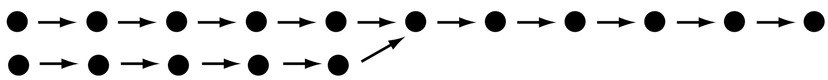
これはとにかく最初のものがあるということです。一番初めの状態が決まらないと次も決まらないので、初めを０としたのです。０が何であるかは説明しません。（ただし、記号は０でなくてもかまいません。）

Ⅱ　<u>どんな要素ｘにたいしても S(x) という要素が決まる。</u>

いきなり記号が出てきて難しい印象を受けますが意味を解説すると、
S は Successor(続き) の頭文字で、S(x) という記号で「x の次」を表すのです。
要するに、「どんなものでも必ず次があるよ」「x の次を S(x) とするよ」と言っているのです。
ただし、公理の中では S(x) は説明抜きに使い、条件Ⅲ、Ⅳで S(x) の満たすべき性質が述べられるだけです。
なぜなら、上のような「説明」を付ければ、「次」とは何か定義しなければならなくなるからです。
この記号を使えば S(x) の次は S(S(x))、その次は S(S(S(x)))、・・・と次々に「次」を作っていけます。
そして、Ⅰの条件から０があることは保証されているので、
0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))),・・・という限りなく続く「系列」ができます。

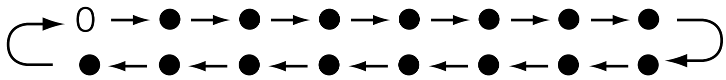
Ⅲ　<u>S(x) = S(y) ならば x = y である。</u>

x の次と y の次が同じなら、x と y は同じものだという意味です。
直感的には次のように合流するようなことはないよ、と言っているのです。
これは自然数が一本の系列になるために必要なことです。



Ⅳ　<u>S(x) = 0 となるような x はない。</u>

０の前はないという意味です。
この条件によって、途中で０に戻りループになることはないよ、といっています。
また、Ⅲの条件と組み合わせれば、途中からのループにもならないことが保証されます。



Ⅴ　<u>Ｎは Ⅰ～Ⅳを満たす最小の集合である。</u>

これは少し解りにくいかもしれません。
Ⅰ～Ⅳの条件があれば、限りなく続く一本の系列が出来ますが、系列はこれ一本だけで充分です。
別の系列が２本も３本もあったら困るので、この条件を付けて一本に限るのです。
（ここであげたⅤの条件は、分かりやすくするために少しアレンジしています。厳密なことを言うと「最小」とは何かをちゃんと定義しておかなければならないのです。）

以上が自然数の定義です。
このように定義したので、今後、自然数に関してⅠ～Ⅴは「説明抜きに」成り立つものとして認めていきます。
そして、それ以外の性質を付け加えることは許されないのです。
「１＋１＝２の証明」もこれを前提として行なわなければならないのです。

次に、０と S(x) を使って数字の１，２を次のように定義します。

$$S(0) = 1$$
$$S(1) = 2$$

これが「1 とは何か？」「2 とは何か？」に対する解答です。
（もちろん記号は i、ii でも、壹、貳でもかまいません。）
以下同様にして３，４，５，・・・の定義も出来ます。
これでようやく 1,2 の定義にまでたどり着きました。

念のために言っておくと、人間は長い間「自然数とは何か」などということは気にせず直感的に数を使ってきたし、子どもが自然数を覚えるときも公理を先に覚えるわけではありません。ペアノが自然数の公理を示したのは 1889 年のことで、ほんの 100 年ちょっと前のことです。ペアノの公理によって自然数が出来たのではなく、それまで長い間何気なく使っていた自然数というものを改めて厳密に考えてみて、論理的に整理したものがペアノの公理なのです。数学の概念はたいていまず直感的につくられて、後から論理的な基礎付けがなされるのです。

4　加法の定義

さて、次は +(加法) の定義をする番です。ただ、はじめに断っておくと、これも長いあいだ直感的に使ってきたものを改めて定義し直したものなので、正直言って「とってつけたような」印象は否めません。

加法の定義をする前に、まずは日常的に使っている『たし算』（加法）の特徴を整理しておきます。
例えば

$$3 + 5 = 8$$

という計算を考えてみると、
これは３と５という２つの自然数に対し８という１つの自然数を対応させる規則です。
このようにある数 (複数でも可) に対し別の１つの数を対応させる規則を「関数」と呼んでいます。
たし算のように２つの数を決めると１つの数が決まる関数を「２変数の関数」といいます。
関数を記号で f (x, y) などと表します。この場合、x と y が変数です。
f をたし算とすれば、次の式が成り立つことになります。

$$f(3, 5) = 8$$

この関数の記号 f と、自然数の公理に出てきた「０」、「S(x)」使って加法を次のように定義します。
先に言っていたように唐突な印象は避けられないと思いますが、我慢してください。

加法の定義：自然数 x, y に対し、次の (i)、(ii) を満たす関数 f を加法といい、f (x, y) = x + y と表す。注

(i)　$f(x, 0) = x$

(ii)　$f(x, S(y)) = S(f(x, y))$

(i) は、x + 0 = x、つまり「x に０を足しても x のままだ」ということに対応しているので、直感的にわかりやすいと思います。（正確にはこの式によって「足しても変わらない０という数の性質」が定義されたのです。）

注　さらに厳密なことを言うと、このような関数がちゃんと存在することを示す必要があるのですが、そこまで追及すると完全に「数学基礎論」（基礎は『簡単』という意味ではなく『土台』ということ）の分野になるのでここでは、このような関数が定義できることは理屈抜きで認めることにします。

(ii) はわかりにくいと思うので、説明していきます。

まず、S(y) というのは自然数の公理で出てきた「y の次」のことです。

ペアノの公理Ⅱによって『次』(S(x)) があることが保証されているので、このような定義が出来ます。

(ii) の左辺の f (x, S(y)) = x + S(y) の意味は「x と『y の次』によって決まる数」、です。

(ii) の右辺の S(f (x, y)) = S(x + y) の意味は「『x と y によって決まる数』の次」、つまりです。

文字のままではわかりにくいので、具体的に x =3、y=1 としてみると

左辺は、f (3, S(1)) = 3 + S(1) = 3 + 2 のことです。

右辺は、S (f (3, 1) = S(3 + 1)、つまり『3 + 1 の次』のことです。

要するに、「『3 + 2』は『3 + 1 の次』だよ」といっているのです。

同様にして、『3 + 1』は『3 + 0 の次』になり、

『3 + 0』は (i) によって『3』になるので、

結局、『3 + 2』は『3 の次の次』になるのです。

このように言い換えれば、

この「加法の定義」が普段使っているたし算と同じことをしていることがわかるのではないでしょうか？

ただし、定義自体にこのような解説は含めるわけにはいきません。

解説は直感的で分かりやすいのですが、定義されていないあいまいな言葉がたくさん出てくるからです。

加法の定義がこんなに解りにくいのは「使っていい前提」が限られているためです。

次はいよいよ「1 ＋ 1 = 2 の証明」ですが、

自然数と加法の定義がはっきりしていれば、証明そのものはいたって簡単です。

加法は (i) と (ii) の性質を持つものと定義されたので、

この (i) と (ii) だけを使って 1 ＋ 1 を計算し、2 になればよいのです。

「1＋1＝2の証明」

加法の定義から

1 + 1 = f (1, 1)

ここで、1 = S(0) なので（1 の定義です）

f (1, 1) = f (1, S(0))

(ii) の式が成り立つので

f (1, S(0)) = S(f (1, 0))

(i) の式から、f (1, 0) = 1 なので

S(f(0, 1)) = S(1) = 2（これは 2 の定義です）

つまり 1 + 1 = 2 が成り立つことになります。

「これが証明なの？」という疑問が生じるのは無理のないことだと思います。

しかし、そもそも「加法の定義」というのは「我々の日常感覚と矛盾がないように」定めたもので、

はじめから「1 + 1 = 2 が成り立つように」決めたものなのです。

ですから「1+1=2」が成り立つのはある意味あたりまえのことなのです。

「日常感覚」との違いは「論理的な厳密性」「あいまいさがない」ということだけなのです。

結論

結局、ここまででやったことは次のことです。

- ペアノの公理 I ～ V が成り立つ集合を自然数と定義する。
- S(0) = 1、S(1) = 2 と定義する。
- 加法を次の (i)、(ii) が成り立つ関数と定義する

(i) $f(x, 0) = x$

(ii) $f(S(x), y) = S(f(x,y))$

- 以上を認めれば、他のことをいっさい前提とせずに、「1 + 1 = 2」が導ける、ということなのです。

ですから、ここでしたことは「1 + 1 = 2 の証明」というよりは、
「我々が日常的に使っている自然数とか加法というものを改めて論理的に整理した」と言ったほうが良いのかもしれません。前に述べたように、「なぜか？」ということにはキリがないので、どこまでを前提として認めて、なにを結論として導けばよいのかをはっきりさせたということなのです。

補足

参考までに、加法の定義が「日常感覚 5 + 3 = 8」と矛盾してないか確かめておきましょう。

$$5 + 3 = f(5, 3) = S(f(5, 2)) = S(S(f(5, 1))) = S(S(S(f(5, 0)))) = S(S(S(5)))=S(S(6)) = S(7) = 8$$

これを使い慣れた数字で表せば、次のことをやっているのです。

$$5 + 3 = (5 + 2) + 1 = (5 + 1) + 1 + 1 = (5 + 0) + 1 + 1 + 1 = 8$$

また、乗法（かけ算）は次のように定義できます。

乗法の定義　自然数 x，y にたいし関数 g(x, y) が次の (i)、(ii) を満たすとき $g(x, y) = x \times y$ とする。

(i) $g(x, 0) = 0$

(ii) $g(x, S(y)) = g(x, y) + y$

さらに減法（引き算）や除法（割り算）が定義され、負の数や分数を定義していくことで、我々が使っている数の世界が（厳密に）構成されていくのです。

以上で「1 + 1 = 2」の考察を終了しますが、
あまり厳密さを求めないのであれば、加法を次の式で定義してかまわないし、矛盾は起きません。

$S(x) = x + 1$

こうすれば

$1 = S(0) = 0 + 1$

$2 = S(1) = 1 + 1$

$3 = S(2) = 2 + 1$

が成り立ちます。普通に数学をしていく上で困ることはないし、
1 ＋ 1=2 の証明もこれで充分だと思います。
厳密な理論は「数学基礎論」専門家にまかせておけば良いのです。